10

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a X – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ 1p

$\left|z+\frac{1}{a}\right|^2 - \left|\bar{z}-\frac{1}{a}\right|^2 = \left(x+\frac{1}{a}\right)^2 + y^2 - \left(x-\frac{1}{a}\right)^2 - y^2 = \frac{4x}{a}$ 1p

$\frac{a}{4}\left(\left|z+\frac{1}{a}\right|^2 - \left|\bar{z}-\frac{1}{a}\right|^2\right) = x = Re\, z$ 1p

b) $2(6+9i)^n - 3(1+8i)^n = 3(7+4i)^n$

$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{n-1}(2+3i)^n = (1+8i)^n + (7+4i)^n$ 1p

$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{n-1} = \left(\frac{1+8i}{2+3i}\right)^n + \left(\frac{7+4i}{2+3i}\right)^n$ 2p

$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{n-1} = \left(\frac{26+13i}{13}\right)^n + \left(\frac{26-13i}{13}\right)^n$

$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{n-1} = (2+i)^n + (2-i)^n$ 1p

Problema 2: soluție orientativă

a) $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(a_1+a_n)}{n} = \frac{a_1+a_n}{2}$ 1p

$\frac{a_1+a_n}{2} \ge \sqrt{a_1 a_n}$ **din inegalitatea mediilor**

$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt{a_1 a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

b) Funcția $\lg x, x \in (0,\infty)$ **este concavă.** 1p

Din inegalitatea lui Jensen $\Rightarrow \lg\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \ge \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \cdots + \lg b_n}{n}$ (1) 2p

$b_k = b_1\cdot q^{k-1}, \forall k \ge 2 \Rightarrow \lg b_k = \lg b_1 + (k-1)\lg q, \forall k \ge 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lg b_n)_{n\ge 1}$ **este progresie aritmetică cu rația** $\lg q$. 1p

În (1) **putem aplica punctul (a)**

$\lg\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \ge \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \cdots + \lg b_n}{n} \ge \sqrt{\lg b_1 \lg b_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

Problema 3: soluție orientativă

a) Se arată că funcția $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ **este strict descrescătoare pe** $(-\infty,0]$ **....1p**

Funcția f este strict descrescătoare întrucât este compunerea a două funcții de monotonii diferite. **....1p**

b) f strict descrescătoare, deci injectivă **....1p**

Se arată că f este surjectivă și se determină $f^{-1}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,0],\ f^{-1}(x)=\frac{1+\sin x}{\sin x-1}$ **....1p**

c) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\arcsin\frac{1+x}{x-1}\Rightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0,\forall x\in(-\infty,-1)$ **....1p**

$x-1<x\Rightarrow f(x-1)>f(x)$

$\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x+1}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)$

Adunând termen cu termen rezultă $f(x-1)+f\left(\frac{1}{x+1}\right)>0$ **....1p**

Cum $f^{-1}:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,-1)\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)<0$

$\Rightarrow f(x-1)+f\left(\frac{1}{x+1}\right)>f^{-1}(x),\forall x\in(-\infty,-1)$ **....1p**

Problema 4: soluție orientativă

Fie punctele $A_1(z_1),\ A_2(z_2),A_3(z_3)$. **Triunghiul** $A_1A_2A_3$ **este înscris într-un cerc de rază r.** **....1p**

Fie $A(z),\ z=az_2+(1-a)z_3\Rightarrow A\in A_2A_3$. **....1p**

Fie B **piciorul perpendicularei dusă din** A_1 **pe** A_2A_3.

$A_1A\geq A_1B\Rightarrow \min_{a\in\mathbb{R}}|z-z_1|=\min_{a\in\mathbb{R}}|az_2+(1-a)z_3-z_1|=A_1B=h$, **unde h este înălțimea dusă din** A_1 **în** $\Delta A_1A_2A_3$. **....1p**

$S=\frac{1}{2}|z_2-z_3|\cdot h=\frac{1}{2}|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|\cdot\sin\measuredangle A_2A_1A_3$, **unde S este suprafața** $\Delta A_1A_2A_3$. **....1p**

$\Rightarrow h=\frac{|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|\cdot\sin\measuredangle A_2A_1A_3}{|z_2-z_3|}$ **....1p**

Aplicând teorema sinusurilor rezultă:

$\frac{|z_2-z_3|}{\sin\measuredangle A_2A_1A_3}=2r\Rightarrow\sin\measuredangle A_2A_1A_3=\frac{|z_2-z_3|}{2r}$ **....1p**

$\Rightarrow h=\frac{1}{2r}|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|$

$\Rightarrow \min_{a\in\mathbb{R}}|az_2+(1-a)z_3-z_1|=\frac{1}{2r}|z_1-z_2|\cdot|z_2-z_3|$ **....1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

i) Legea „$*$" admite element neutru dacă și numai dacă $\exists\, e \in R$ astfel încât $x * e = e * x = x$, $\forall x \in R$ **1p**

Se obține $x(ae-2) = e-6$, $\forall x \in R$ **1p**

Pentru $x = 0$, se obține $e = 6$ **1p**

și apoi $a = \frac{1}{3}$ **1p**

ii) Este necesar $axy - x - y + 6 \in [0,\, 6]$, $\forall x,\ y \in R$. **1p**

Pentru $x = y = 6$ se obține $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$ **1p**

și orice $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$ satisface cerința. **1p**

Problema 2: soluție orientativă

i) Este necesar și suficient ca F să fie derivabilă. **1p**

Din continuitate rezultă $a + b = 1$. **1p**

Din derivabilitate rezultă $a = 0$ **1p**

și apoi $b = 1$. **1p**

ii) $\int_1^e \frac{1}{xF(x)}dx = \int_1^e \frac{1}{x\left(\ln^2 x + 1\right)}dx = \int_1^e \frac{(\ln x)'}{\ln^2 x + 1}dx =$ **2p**

$= \operatorname{arctg}(\ln e) - \operatorname{arctg}(\ln 1) = \frac{\pi}{4}$. **1p**

Problema 3: soluție orientativă

Fie $g: [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. Egalitatea din ipoteză se mai poate scrie $F(1) - F(0) = g(1) - g(0)$ sau $F(1) - g(1) = F(0) - g(0)$. **2p**

Fie $h: [0,1] \to \mathbb{R}, h(x) = F(x) - g(x)$. h satisface condițiile teoremei lui Rolle **2p**

Există $c \in (0,\, 1)$ astfel încât $h'(c) = 0$, echivalent cu $f(c) = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}$ **2p**

Se verifică imediat că $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} < \frac{\sqrt{2}}{1 + c}$, pentru $c \in (0,\, 1)$. **1p**

Problema 4: soluție orientativă

i) Se arată ușor că nu există grupuri prietenoase cu trei elemente ($f(x)=x^2$ este automorfism și nu există $a \in G$, $\text{ord}(a)=3$ cu $f(a)=a$). **2p**

Orice grup cu patru elemente este sau ciclic (izomorf cu Z_4) sau izomorf cu grupul lui Klein. Dacă G cu patru elemente este ciclic, atunci există două automorfisme ($f(x)=x$, $f(x)=x^3$) și grupul este prietenos. **1p**

Dacă $G_1=\{e, a, b, c\}$, cu $a^2=b^2=c^2=e$, $f:G\to G$, $f(e)=e$, $f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=a$ este automorfism și nu există $x\in G$, $\text{ord}(x)=2$, astfel încât $f(x)=x$. Deci, un grup izomorf cu grupul lui Klein nu este prietenos. **1p**

ii) Presupunem, prin metoda reducerii la absurd, că $\text{ord}(G)$ e liber de pătrate. Atunci, există n număr natural nenul și $p_1, p_2, ..., p_n$ numere prime distincte, astfel încât $\text{ord}(G)=p_1p_2...p_n$.

Fie $f \in \text{Aut}(G)$, $H=\{x\in G / f(x)=x\}$. Se arată ușor că H este subgrup al lui G. **1p**

Există $a_1, a_2, ..., a_n$ ce aparțin lui G cu $\text{ord}(a_1)=p_1$, $\text{ord}(a_2)=p_2$, ..., $\text{ord}(a_n)=p_n$, astfel încât $f(a_1)=a_1$, $f(a_2)=a_2$,..., $f(a_n)=a_n$. Rezultă că $p_1 / \text{ord}(H)$, $p_2 / \text{ord}(H)$,... $p_n / \text{ord}(H)$.

Cum $p_1, p_2, ..., p_n$ sunt numere prime distincte, rezultă $p_1p_2...p_n=\text{ord}(G)/\text{ord}(H)$, deci $H=G$ și, în particular, $f=1_G$. **1p**

Cum singurul automorfism interior al lui G este 1_G, rezultă că G este comutativ. Cum automorfismul $x\to x^{-1}$ este 1_G, obținem $x^2=e$, $\forall x\in G$, deci $p_1=p_2=...=p_n=2$, fals. **1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.