11

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XI – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
a) $X^{2023}=X^{2022}\Rightarrow \det\left(X^{2023}\right)=\det\left(X^{2022}\right)\Rightarrow(\det X)^{2023}=(\det X)^{2022}\Rightarrow(\det X)^{2022}(\det X-1)=0$ Deci $\det X\in\{0,1\}$.	1p
Caz 1: Dacă $\det X=1\neq 0$, atunci X e matrice inversabilă și egalitatea $X^{2023}=X^{2022}$ duce la $X^{2023}\cdot X^{-2020}=X^{2022}\cdot X^{-2020}$, adică $X^3=X^2$.	1p
Caz 2 : Dacă $\det X=0$, din identitatea Hamilton - Cayley obținem $X^2-(trX)\cdot X=O_2$, deci $X^2=(trX)\cdot X\ (*)$. Atunci $X^3=(trX)^2\cdot X$ și, inductiv, $X^{2022}=(trX)^{2021}\cdot X$, respectiv $X^{2023}=(trX)^{2022}\cdot X$. Din $X^{2023}=X^{2022}$ deducem $(trX)^{2022}\cdot X=(trX)^{2021}\cdot X\Leftrightarrow(trX)^{2021}(trX-1)\cdot X=O_2$, de unde $X=O_2$, sau $trX=0$, sau $trX=1$. i) Dacă $X=O_2$, evident $X^3=X^2$. ii1) Dacă $X\neq O_2$ și $trX=0$, din $(*)$ obținem $X^2=O_2$ și apoi $X^3=X^2\cdot X=O_2\cdot X=O_2$, deci $X^3=X^2$. ii2) Dacă $X\neq O_2$ și $trX=1$, din $(*)$ obținem $X^2=X$ și apoi, $X^3=X^2$.	2p
b) Formularea predicatului unar $P(n)$: „$A^n=\begin{pmatrix}\frac{1+\cos^n 2\alpha}{2} & \frac{1-\cos^n 2\alpha}{2} & 0 & 0\\ \frac{1-\cos^n 2\alpha}{2} & \frac{1+\cos^n 2\alpha}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos(n\beta) & \sin(n\beta)\\ 0 & 0 & -\sin(n\beta) & \cos(n\beta)\end{pmatrix}$”, $n\in\mathbb{N}^*$.	1p
Etapa de verificare	1p
Etapa de demonstrație propriu-zisă și finalizare	1p

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Problema 2: soluție orientativă	**Punctaj**
Din teorema Hamilton- Cayley $\Rightarrow A^2=(trA)\cdot A$ și $B^2=(trB)\cdot B$ $(*)$, de unde $A^2B^2=(trA)(trB)\cdot AB$ și cum $A^2B^2=(AA)(BB)=A(AB)B=A(BA)B=(AB)(AB)=(AB)^2$, deducem $(AB)^2=(trA)(trB)\cdot(AB)$(1).	2p
$det(AB)=(det\,A)(detB)=0$, deci conform teoremei Hamilton- Cayley, $(AB)^2=(tr(AB))\cdot(AB)$. (2)	1p
Din (1) și (2) $(trA)(trB)\cdot(AB)=(tr(AB))\cdot(AB)$ și, cum $AB\neq O_2$, obținem $(trA)(trB)=tr(AB)$.$(**)$	1p
$(aA+bB)^2=(aA+bB)(aA+bB)\overset{AB=BA}{=}a^2A^2+2abAB+b^2B^2\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}(aA+bB)^2=a^2(trA)A+2abAB+b^2(trB)B$.(3)	1p
Din teorema Hamilton- Cayley, $(aA+bB)^2=tr(aA+bB)\cdot(aA+bB)-det(aA+bB)I_2=$ $=[a(trA)+b(trB)](aA+bB)-\det(aA+bB)\,I_2$ $=a^2(trA)\cdot A+ab(trA)\cdot B+ab(trB)\cdot A+b^2(trB)\cdot B-$ $-det(aA+bB)\cdot I_2$. (4)	1p
$(3)\Rightarrow tr\left((aA+bB)^2\right)=a^2(trA)^2+2ab\cdot tr(AB)+b^2\cdot(trB)^2$ $(4)\Rightarrow tr\left((aA+bB)^2\right)=a^2(trA)^2+2ab\cdot tr(A)tr(B)+b^2\cdot(trB)^2-2det(aA+bB)$, de unde $\overset{(**)}{\Rightarrow}det(aA+bB)=0$.	1p

Problema 3: soluție orientativă	**Punctaj**
$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\sqrt{3}$ și putem considera predicatul unar $P(n)$: „$n-2<x_n<n$”, $n\in\mathbb{N}^*$. I. Etapa de verificare $P(1)$: „$-1<x_1=0<1$”, adevărată. $P(2)$: „$0<x_2=1<2$”, adevărată. II. Etapa de demonstrație propriu-zisă: Presupunem P(k) adevărată, unde P(k): „$k-2<x_k<k$” și arătăm că P(k+1) adevărată, unde P(k+1): „$k-1<x_{k+1}<k+1$”. Din P(k): $k-2<x_k<k\,\vert\cdot k>0\Rightarrow k(k-2)<kx_k<k^2\,\vert+1\Rightarrow(k-1)^2<1+kx_k<k^2+1<(k+1)^2$, de unde $k-1<\sqrt{1+kx_k}<k+1\Leftrightarrow k-1<x_{k+1}<k+1$, deci P(k+1) adevărată. Conform primului principiu al inducției matematice rezultă $P(n)$ adevărată, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.	2p

Astfel, cu ajutorul lemei cleștelui și din $n-2<x_n<n$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, iar din $\frac{n-2}{n}<\frac{x_n}{n}<1$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$.	1p
Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right)^n \overset{„1^\infty"}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x_n-n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n-n}}\right]^{\frac{x_n-n}{n}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, unde $y_n=x_n-n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*.(*)$ Din $n-2<x_n<n\,\vert-n \Rightarrow -2<x_n-n<0 \Rightarrow y_n\in(-2,0)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. (1) $y_{n+1}-y_n = x_{n+1}-n-1-x_n+n = x_{n+1}-x_n-1=(x_{n+1}-1)-x_n=\frac{x_{n+1}^2-1}{x_{n+1}+1}-x_n \overset{x_{n+1}^2=1+nx_n}{=} \frac{nx_n}{x_{n+1}+1}-x_n=$ $=x_n\left(\frac{n}{x_{n+1}+1}-1\right)=\frac{x_n(n-x_{n+1}-1)}{x_{n+1}+1}<0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (deoarece $n-1<x_{n+1}$), deci $(y_n)_{n\ge1}$ strict descrescător (2). Din (1) și (2) $\overset{\text{Weierstrass}}{\Longrightarrow}$ $(y_n)_{n\ge1}$ convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \overset{\text{not}}{=} y\in[-2,0]$.	2p
$y=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-(n+1))=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+nx_n}-(n+1)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+nx_n-(n+1)^2}{\sqrt{1+nx_n}+n+1}\overset{x_n=y_n+n}{=}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ny_n+n^2-n^2-2n}{\sqrt{1+ny_n+n^2}+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ny_n-2n}{\sqrt{1+ny_n+n^2}+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(y_n-2)}{n\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}y_n+1}+1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{y-2}{2}$. Deci $y=\frac{y-2}{2}\Rightarrow y=-2.\ (**)$ Din $(*)$ și $(**)$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right)^n \overset{„1^\infty"}{=} e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.	2p

Problema 4: soluție orientativă	**Punctaj**
a) Cum funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_2 x$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, aplicând g peste inegalitatea din ipoteză obținem $f(x)\le \log_2 x< f(x)+1$, $\forall x>1$ și cum $f(x)\in\mathbb{N}$, deducem că $f(x)=[\log_2 x]$, $\forall x>1$.	1p
Astfel, $f(x)=n$, dacă $n\le\log_2 x<n+1$, pentru $\forall n\in\mathbb{N}$și , încă, $f(x)=n$, $\forall x\in\left[2^n,2^{n+1}\right)$,$\forall n\in\mathbb{N}$.	1p
Pentru $\alpha\in\left(2^n,2^{n+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=n, \forall n\in\mathbb{N}.(*)$ Pentru $\alpha=2^n$, $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} f(x)=n$, $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}} f(x)=n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $(**)$ Pentru $\alpha=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=0$ (n=0) . $(***)$	1p
Din $(*)$, $(**)$ și $(***)$ rezultă că $\{\alpha\in(1,+\infty)\mid f$ nu are limită în $\alpha\}=\{2^n\mid n\in\mathbb{N}^*\}$.	

b) Demonstrăm prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$, *P(n)*: „$x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k$” $(*)$. I. *Verificare* Pentru n=1, $P(1)$ este, evident, adevărată. Pentru n=2, avem : $x_3 \geq 4x_2 - x_1 = 3x_2 + x_2 - x_1 \overset{x_2 > x_1}{>} 3x_2 = 2x_2 + x_2 \overset{x_2 > x_1}{>} 2x_2 + x_1 = \sum_{k=1}^{2} kx_k$, deci $P(2)$ adevărată. II. *Demonstrația propriu-zisă* Presupunem $P(p)$ adevărată, unde $P(p)$: $x_{p+1} > \sum_{k=1}^{p} kx_k$ și arătăm că $P(p+1)$ adevărată, unde $P(p+1)$: $x_{p+2} > \sum_{k=1}^{p+1} kx_k$. $x_{p+2} \geq (p+3)x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} kx_k = (p+1)x_{p+1} + 2x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} kx_k > (p+1)x_{p+1} + 2\sum_{k=1}^{p} kx_k - \sum_{k=1}^{p} kx_k =$ $= (p+1)x_{p+1} + \sum_{k=1}^{p} kx_k = \sum_{k=1}^{p+1} kx_k$. Cum $P(p)$ adevărată, atunci $P(p+1)$ adevărată și, conform primului principiu al inducției matematice, *P(n)* adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	2p
Demonstrăm prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$, *Q(n)*: „$x_n \geq (n-1)!x_1$” $(**)$. I. *Verificare* Pentru n=1, $Q(1)$ este, evident, adevărată. Pentru n=2, avem *Q(2)*: $x_2 \geq (2-1)!x_1 \Leftrightarrow x_2 \geq x_1$, care este adevărată din ipoteză. II. *Demonstrația propriu-zisă* Presupunem $Q(p)$ adevărată, unde $Q(p)$: $x_p \geq (p-1)!x_1$ și arătăm că $Q(p+1)$ adevărată, unde $Q(p+1)$: $x_{p+1} \geq p!x_1$. $(*) \Rightarrow x_{p+1} > \sum_{k=1}^{p} kx_k \geq px_p \geq p(p-1)!x_1 = p!x_1$. Cum $Q(p)$ adevărată, atunci $Q(p+1)$ adevărată și, conform primului principiu al inducției matematice, *Q(n)* adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	1p
Cum șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ verifică $(**)$, iar $\lim_{n\to\infty}(n-1)!x_1 = +\infty$, obținem $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.