5

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a V – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) $x = 624 \cdot (57 - 45) + 12 + 653 \cdot 13 = 624 \cdot 12 + 12 + 625 \cdot 13 = 12 \cdot 625 + 625 \cdot 13 = 625 \cdot (12 + 13) = 625 \cdot 25$ **....1p**

$x = 25^3$ - este cub perfect **....1p**

$x = (5^2)^3 = (5^3)^2$ – este pătrat perfect **....1p**

b) $y = (2^{51} \cdot 2^{10} : 2^{60} + 3^{100} : 3^{99} \cdot 9)^{2024} : 29^{2023} + 1 + 1 - 28 = 29^{2024} : 29^{2023} + 2 - 28 = 29 + 2 - 28 = 3$ **....1p**

$x^{11} = [(5^3)^2]^{11} = 125^{22}$ **....1p**

$2^{51y+1} = 2^{154} = (2^7)^{22} = 128^{22}$ **....1p**

Deci $x < y$ **....1p**

Problema 2: soluție orientativă

$A = 5 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n\ cifre} \cdot 2020$ **....1p**

$= 10100 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n\ cifre}$ **....1p**

$= (10000 + 100) \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n\ cifre}$ **....1p**

$= \underbrace{111\ldots1}_{n\ cifre}0000 + \underbrace{111\ldots1}_{n\ cifre}00$ **....1p**

$= 11\underbrace{222\ldots2}_{n-2\ cifre}1100$ **....1p**

$S(A) = 4 + 2(n - 2) = 2n$ **....1p**

$S(A) = 2024 \Leftrightarrow n = 1012$ **....1p**

Problema 3: soluție orientativă

Fie $x = \overline{x_1x_2\ldots x_m}$ și $y = \overline{y_1y_2\ldots y_n}$

x are m cifre, deci $10^{m-1} \leq x < 10^m$. Egalitatea nu are loc, deoarece x nu se poate scrie ca o putere a lui 10. Deci $10^{m-1} < x < 10^m$ **....2p**

Analog, $10^{m-1} < y < 10^m$ **....1p**

Înmulțind cele două relații, obținem $10^{m+n-2} < x \cdot y < 10^{m+n}$ **....1p**

Deci $10^{m+n-2} < 10^{2023} < 10^{m+n}$ **....1p**

De unde $m + n - 2 < 2023 < m + n$ **....1p**

Sau $m + n > 2023$ și $m + n < 2025$, deci $m + n = 2024$ **....1p**

Problema 4: soluție orientativă

a) Fiecare jucător joacă 15 meciuri **1p**
Cum într-un meci sunt doi jucători, avem **1p**
Numărul total de meciuri $16 \cdot 15 : 2 = 120$ **2p**
b) Cum în fiecare meci există un jucător eliminat rezultă că numărul de meciuri este egal cu numărul jucătorilor eliminați **2p**
Deci au fost 23 de jucători eliminați, plus câștigătorul turneului, rezultă $n = 24$ **1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

6

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VI – a

VI

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a)

$\frac{x}{x+2-x}=\frac{y}{y+4-y}$ 1p

$\frac{x}{2}=\frac{y}{4}$ 1p

$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ 1p

b)

$\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}=\frac{t}{8}$ 1p

$\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{36}=\frac{t^2}{64}=\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4+16+36+64}$ 1p

$\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{36}=\frac{t^2}{64}=25$ 1p

$x=10, y=20, z=30, t=40$ 1p

Problema 2: soluție orientativă

a)

$\left.\begin{array}{r} a|a\cdot b+b \\ a|a\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow a|b$ 1p

$\left.\begin{array}{r} b|a\cdot b+a \\ b|a\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow b|a$ 1p

$a|b$ și $b|a \Rightarrow a=b$ 1p

b)

$d=(x,y) \Rightarrow x=da, y=db, (a,b)=1$ 1p

$dab|d^{2022}\cdot a^{2023}+a+db^2$ 1p

$\left.\begin{array}{r} a|d^{2022}a^{2023} \\ a|a \end{array}\right\} \Rightarrow a|db^2, (a,b)=1 \Rightarrow a|d$ 1p

$\left.\begin{array}{r} d|d^{2022}a^{2023} \\ d|db^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d|a \quad \Rightarrow a=d \ \Rightarrow x=d^2$ 1p

Problema 3: soluție orientativă

a)

$\sphericalangle AOB+\sphericalangle AOC=180^0$

$180^0 - \sphericalangle AOC = \frac{1}{2}(90^0 - \sphericalangle AOB)$ 1p

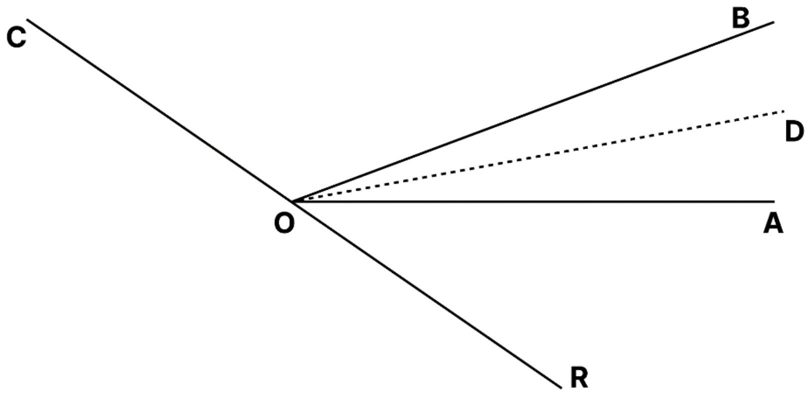
$360^0 - 2 \cdot \sphericalangle AOC = 90^0 - \sphericalangle AOB$

$270^0 = 2 \cdot \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOB$ 1p

Deoarece $\sphericalangle AOB = 180^0 - \sphericalangle AOC \Rightarrow\ 270^0 = 2 \cdot \sphericalangle AOC - 180^0 + \sphericalangle AOC$ 1p

$3 \cdot \sphericalangle AOC = 450^0$, deci $\sphericalangle AOC = 150^0$, iar $\sphericalangle AOB = 30^0$ 1p

b)



$[OD$ este bisectoarea unghiului AOB, rezultă $\sphericalangle DOB \equiv \sphericalangle AOD$,

$\sphericalangle DOB = \sphericalangle AOD = \frac{30^0}{2} = 15^0$ 1p

$\sphericalangle ROA = 180^0 - 150^0 = 30^0$ 1p

$\sphericalangle ROD = \sphericalangle ROA + \sphericalangle AOD = 30^0 + 15^0 = 45^0$ 1p

<u>Problema 4: soluție orientativă</u>

a)

Cum $\widehat{AM} \equiv \widehat{PQ} \equiv \widehat{BS} = 60^0 \Rightarrow \sphericalangle AOM = \sphericalangle POQ = \sphericalangle BOS = 60^0$

Cum unghiurile AON și POQ sunt complementare, obținem că $\sphericalangle AON + \sphericalangle POQ = 90^0$ și cum $\sphericalangle POQ \equiv \sphericalangle AOM \Rightarrow \sphericalangle AON + \sphericalangle AOM = 90^0 \Rightarrow \sphericalangle MON = 90^0$ 1p

Cum $\sphericalangle AON + \sphericalangle POQ = 90^0$ și $\sphericalangle POQ \equiv \sphericalangle BOS \Rightarrow \sphericalangle AON + \sphericalangle BOS = 90^0 \Rightarrow \sphericalangle NOS = 90^0$ 1p

Astfel obținem că $\sphericalangle MOS = 180^0$, deci punctele M, O, S sunt coliniare și cum $\sphericalangle MON = 90^0$, obținem că dreptele ON și MS sunt perpendiculare. 1p

b)

Avem $\sphericalangle MOP + \sphericalangle POQ + \sphericalangle BOQ + \sphericalangle BOS = 180^0 \Leftrightarrow 6\sphericalangle BOQ + 120^0 = 180^0$, de unde $\sphericalangle BOQ = 10^0$ și cum $\sphericalangle BOQ \equiv \sphericalangle SOT \Rightarrow \sphericalangle SOT = 10^0 \Rightarrow \sphericalangle POM = 50^0$ 1p

Avem $\sphericalangle POT = \sphericalangle POQ + \sphericalangle BOQ + \sphericalangle BOS + \sphericalangle SOT = 140^0$ 1p

și, de asemenea, $\sphericalangle PON = \sphericalangle POM + \sphericalangle MON = 140^0$, astfel obținem că

$\sphericalangle POT \equiv \sphericalangle PON \Rightarrow \widehat{PT} = \widehat{PN}$ 1p

Fie L situat pe arcul mic TN, astfel încât punctele P, O, L sunt coliniare, obținem că PL diametru, de unde $\widehat{PL} = 180^0$

Cum $180^0 = \widehat{PN} + \widehat{NL}, 180^0 = \widehat{PT} + \widehat{TL}$ și cum $\widehat{PT} \equiv \widehat{PN} \Rightarrow \widehat{NL} \equiv \widehat{TL} \Rightarrow L$ este mijlocul arcului mic TN. 1p

<u>Notă:</u> Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.