7

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală, 10 februarie 2024

Clasa a VII – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) $S=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2023}}{\sqrt{2024}\cdot\sqrt{2023}}$

$S=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{2024}}{\sqrt{2024}\cdot\sqrt{2023}}-\frac{\sqrt{2023}}{\sqrt{2024}\cdot\sqrt{2023}}$ 1p

$S=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}++\cdots+\frac{1}{\sqrt{2023}}-\frac{1}{\sqrt{2024}}$ 1p

$S=1-\frac{1}{\sqrt{2024}}$ 1p

b) $T=\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a^2+1}}+\frac{\sqrt{a^2+2}-\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{a^2+2}}+\frac{\sqrt{a^2+3}-\sqrt{a^2+2}}{\sqrt{a^2+2}\cdot\sqrt{a^2+3}}+\cdots+\frac{\sqrt{b^2}-\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{b^2-1}\cdot\sqrt{b^2}}$ 1p

$T=\frac{1}{\sqrt{a^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{b^2}}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\in Q$ 1p

Astfel avem:

$$\left.\begin{array}{l}(1^2,2^2),(1^2,3^2),\ldots,(1^2,44^2)\\(2^2,3^2),(2^2,4^2),\ldots,(2^2,44^2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(42^2,43^2),(42^2,44^2)\\(43^2,44^2)\end{array}\right\}\Rightarrow 1+2+3+\ldots+43=\frac{43\cdot 44}{2}=946 \text{ perechi de forma}$$

(a^2,b^2), unde $1\le a<b\le 44$, pentru care numărul T este rațional..........2p

În concluzie există cel puțin 946 submulțimi ale mulțimii A, pentru care suma elementelor acestora să fie un număr rațional.

Soluție alternativă b)

Din $\left.\begin{array}{l} S_1^1=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\in Q \\ S_1^2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\in Q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_1^{43}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{1936}-\sqrt{1935}}{\sqrt{1935}\cdot\sqrt{1936}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{44}\in Q \end{array}\right\}\Rightarrow$ 43 submulțimi......................**1p**

Din $\left.\begin{array}{l} S_2^1=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\in Q \\ S_2^2=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}+\ldots+\frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{16}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\in Q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_2^{42}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1936}-\sqrt{1935}}{\sqrt{1935}\cdot\sqrt{1936}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{44}\in Q \end{array}\right\}\Rightarrow$ 42 submulțimi **1p**

Din $S_{43}^1=\frac{\sqrt{1850}-\sqrt{1849}}{\sqrt{1849}\cdot\sqrt{1850}}+\frac{\sqrt{1851}-\sqrt{1850}}{\sqrt{1850}\cdot\sqrt{1851}}+\ldots+\frac{\sqrt{1936}-\sqrt{1935}}{\sqrt{1935}\cdot\sqrt{1936}}=\frac{1}{43}-\frac{1}{44}\in Q\Rightarrow 1$ submulțime. **1p**

În total avem cel puțin $1+2+3+\ldots+43=\frac{43\cdot 44}{2}=946$ submulțimi ale mulțimii A, pentru care suma elementelor acestora să fie un număr rațional...
1p

<u>Problema 2: soluție orientativă</u>

$xyz=1\Rightarrow\frac{1}{z}=xy$..**2p**

$\begin{cases} x+\frac{1}{y}=2 \\ y+xy=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy-2y=-1 \\ xy+y=3 \end{cases}\Rightarrow 3y=4\Rightarrow y=\frac{4}{3}, x=\frac{5}{4}, z=\frac{3}{5}$..**5p**

<u>Problema 3: soluție orientativă</u>

a) $\left.\begin{array}{l} O\ mijlocul\ BD \\ O\ mijlocul\ CE \\ BD, CE\ diagonalele\ BCDE \end{array}\right\}\Rightarrow BCDE\ paralelogram$ **2p**

b) Presupunem că patrulaterul ABCD are cel puţin două unghiuri drepte (trei nu pot fi).

Avem următoarele situaţii:

I. Unghiul B = C = 90^0 ⇒ AB ∥ DC, dar EB ∥ DC (din punctul anterior), deci imposibil..................**1p**

II. Unghiul D = C = 90^0 ⇒ AD ∥ BC, dar ED ∥ BC, deci imposibil. **1p**

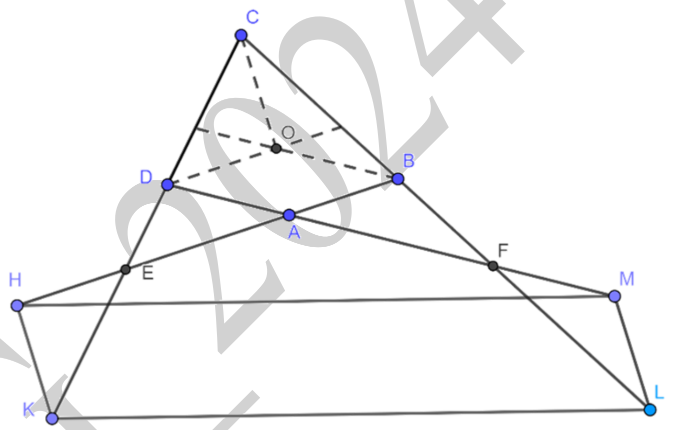
III. Unghiul B = D = 90^0..**1p**

În triunghiul BAC dreptunghic, $BE = \frac{AC}{2}$ $(CE = AE)$, iar în triunghiul DAC, $DE = \frac{AC}{2}$ $(CE = AE$ **1p**

Obţinem astfel că BEDC este romb, şi că ΔDCE şi ΔBCE sunt echilaterale ⇒ unghiul BCD are 120^0 deci BAD are 60^0 . Obţinem şi în acest caz contradicţie, deci patrulaterul nu poate avea decât maxim un unghi drept. **1p**

Problema 4: soluție orientativă

Realizare desen. **1p**



$Fie\ DO \parallel AB\ și\ BO \parallel AD \Rightarrow ABOD\ paralelogram \Rightarrow AB = DO \Rightarrow DO = EH$ **1p**

$DO \parallel AB, CD\ secantă. \sphericalangle CDO = \sphericalangle CEB\ (unghiuri\ corespondente).$ **1p**

$$\sphericalangle CEB = \sphericalangle HEK\ (unghiuri\ opuse\ la\ vârf). \left.\begin{matrix} EH \equiv DO \\ \sphericalangle HEK \equiv \sphericalangle CDO \\ KE \equiv CD \end{matrix}\right\} \overset{LUL}{\Longrightarrow} \Delta EHK \equiv \Delta DOC$$

$\Rightarrow \begin{cases} HK \equiv CO \\ \sphericalangle HKE \equiv \sphericalangle DCO \end{cases}$ **1p**

$Fie\ dreptele\ HK\ ȘI\ CO, CK\ secantă, \sphericalangle HKE \equiv \sphericalangle DCO (unghiuri\ alterne\ interne) \Rightarrow HK \parallel CO.$

.... **1p**

Se demonstrează analog și pentru $\Delta FLM \equiv \Delta BOC$. **1p**

$$\left.\begin{matrix} CO = HK \\ CO \parallel HK \\ CO = LM \\ CO \parallel LM \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} HK = LM \\ HK \parallel LM \end{cases} \Longrightarrow KHLM\ paralelogram$$ **1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.