8

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VIII – a

V1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluţie orientativă

Din $\left.\begin{matrix} AD \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \perp AB$ **1p**

Din $\left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ AB \perp AC \\ AD, AC \subset (DAC) \\ AD \cap AC = \{A\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (DAC)$ şi cum $CD \subset (DAC) \Rightarrow AB \perp CD$ **1p**

Din $\left.\begin{matrix} AD \perp (ABC) \\ CE \perp (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} AD \parallel CE \\ AD > CE \\ \sphericalangle DAC = 90^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ADEC$ trapez dreptunghic **1p**

Cu teorema lui Pitagora obţinem că $AE = 2\sqrt{10}\ cm, CD = 2\sqrt{15}\ cm$ **1p**

Fie $\{O\} = AE \cap DC$, atunci $\triangle OCE \sim \triangle ODA \Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OC}{OD} = \frac{2}{3} \Rightarrow OC = \frac{4\sqrt{15}}{5}\ cm$,

$OE = \frac{4\sqrt{10}}{5}\ cm$ **1p**

Aplicând reciproca teoremei lui Pitagora, se obţine că $\sphericalangle EOC = 90^0 \Rightarrow AE \perp CD$ **1p**

Din $\left.\begin{matrix} CD \perp AE \\ CD \perp AB \\ AE, AB \subset (BAE) \\ AB \cap AE = \{A\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (BAE)$. **1p**

Problema 2: soluţie orientativă

a) Avem $\frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy} \Leftrightarrow 2xy \le \sqrt{xy}(x+y) \Leftrightarrow$ **1p**

$4xy \le (x+y)^2 \Leftrightarrow$ **1p**

$0 \le (x-y)^2$. **1p**

b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ **1p**

Avem $\frac{2a}{\sqrt{bc}}+\frac{2b}{\sqrt{ac}}+\frac{2c}{\sqrt{ab}} \le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (de arătat) **1p**

Cu inegalitatea $m_h \le m_g$ avem: $\frac{2bc}{b+c} \le \sqrt{bc} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{bc}} \le \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{bc}} \le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

și analoagele **1p**

Adunând aceste ultime relații se obține concluzia. **1p**

Soluție alternativă b)

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$ **1p**

Avem $\frac{2a}{\sqrt{bc}}+\frac{2b}{\sqrt{ac}}+\frac{2c}{\sqrt{ab}}\le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (de arătat) **1p**

Cu inegalitatea $m_g \le m_a$ avem: $\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\le\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{bc}}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow\frac{2a}{\sqrt{bc}}\le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

și analoagele **1p**

Adunând aceste ultime relații se obține concluzia. **1p**

<u>Problema 3: soluție orientativă</u>

Presupunem că există o pereche $\left(m,n\right)\in A\cap B\Rightarrow\left(m-10\right)^2+\left(n+11\right)^2\le 221$

$\left(m+14\right)^2+\left(n-5\right)^2\le 221$ cu $\left(m,n\right)\in Z\times Z$ **2p**

Obținem că $\left(m-10\right)^2<225$ și $\left(m+14\right)^2<225\Rightarrow m\in\{-4,-3,-2,-1,0\}$. **1p**

Pentru $m=-4\Rightarrow\left(n+11\right)^2\le 25$ și

$\left(n-5\right)^2\le 121\Rightarrow n\in\left[-16,-6\right]\cap\left[-6,16\right]=\{-6\}\Rightarrow\left(m,n\right)=\left(-4,-6\right)$. **1p**

Pentru $m=-3\Rightarrow\left(n+11\right)^2\le 52$ și $\left(n-5\right)^2\le 100\Rightarrow n\in\left[-5,\sqrt{52}-11\right]\Rightarrow n\in\{-5,-4\}\Rightarrow$

$\left(m,n\right)=\left(-3,-5\right),\left(-3,-4\right)$ **1p**

Pentru $m=-2\Rightarrow\left(n+11\right)^2\le 77$ și $\left(n-5\right)^2\le 77\Rightarrow n\in\left[-\sqrt{77}+5,\sqrt{77}-11\right]\Rightarrow n\in\{-3\}$

$\Rightarrow\left(m,n\right)=\left(-2,-3\right)$. **1p**

Pentru $m=-1\Rightarrow\left(n+11\right)^2\le 100$ și $\left(n-5\right)^2\le 52\Rightarrow n\in\left[-\sqrt{52}+5,-1\right]\Rightarrow n\in\{-2,-1\}\Rightarrow$

$\left(m,n\right)=\left(-1,-2\right),\left(-1,-1\right)$.

Pentru $m=0\Rightarrow\left(n+11\right)^2\le 121$ și $\left(n-5\right)^2\le 25\Rightarrow n\in\{0\}\Rightarrow\left(m,n\right)=\left(0,0\right)$.

Prin calcul direct, se arată că toate perechile găsite verifică ipoteza, de unde se obține :

$A\cap B=\{\left(-4,-6\right),\left(-3,-5\right),\left(-3,-4\right),\left(-2,-3\right),\left(-1,-2\right),\left(-1,-1\right),\left(0,0\right)\}$ **1p**

<u>Problema 4: soluție orientativă</u>

Fie $\{E\}=MO\cap CD$ și $\{F\}=NO\cap AD$.

Din $\left.\begin{array}{l}MP\perp\left(VCD\right)\\CD\subset\left(VCD\right)\end{array}\right\}\Rightarrow MP\perp CD,\left.\begin{array}{l}VO\perp\left(ABC\right)\\CD\subset\left(ABC\right)\end{array}\right\}\Rightarrow VO\perp CD\Rightarrow CD\perp\left(VMO\right)$ și cum

$ME\subset\left(VMO\right)\Rightarrow ME\perp CD$, dar $AB\parallel CD\Rightarrow ME\perp AB\Rightarrow\sphericalangle OMB=90^0$. Analog se arată că $\sphericalangle ONB=90^0$ **2p**

Avem $\triangle OAM \equiv \triangle OCE (U.L.U) \Rightarrow OM \equiv OE$, analog $ON \equiv OF$ **1p**
În triunghiul VME, VO înălțime și mediană, deci $\triangle VME$ isoscel de bază ME, de unde VO bisectoare, astfel $\sphericalangle OVM \equiv \sphericalangle OVE$, analog $\sphericalangle OVN \equiv \sphericalangle OVF$
Fie $\{X\} = MP \cap VE \Rightarrow MP \perp VE$. Atunci $\sphericalangle VPX \equiv \sphericalangle OPM (op.vf)$, $\sphericalangle VXP \equiv \sphericalangle MOP \Rightarrow \sphericalangle PVX \equiv \sphericalangle PMO$ și cum $\sphericalangle PVX \equiv \sphericalangle OVM \Rightarrow \sphericalangle PMO \equiv \sphericalangle OVM$, analog $\sphericalangle PNO \equiv \sphericalangle OVN$ **1p**
Avem $\triangle MOP \sim \triangle VOM \Rightarrow \frac{MO}{VO} = \frac{MP}{VM} = \frac{OP}{OM} \Rightarrow OM^2 = VO \cdot OP$, analog $ON^2 = VO \cdot OP \Rightarrow$ $OM \equiv ON$ **1p**
Avem $\triangle OMB \equiv \triangle ONB (C.C) \Rightarrow \sphericalangle OBM \equiv \sphericalangle OBN \Rightarrow BD$ bisectoarea $\sphericalangle ABC$ **1p**
Din $ABCD$ paralelogram, BD diagonală și bisectoare $\Rightarrow ABCD$ romb. **1p**

<u>**Notă:**</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.