5

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a V – a

V1

SUBIECTE:

1. Se dau numerele

$$x = 624 \cdot 57 - 45 \cdot 624 + 12 + 625 \cdot 13$$

$$y = \left(8^{17} \cdot 4^{5} : 2^{60} + 3^{100} : 27^{33} \cdot 9\right)^{2024} : 29^{2023} + 1^{2024} + 2024^{0} - 28$$

a) Arătați că x este pătrat perfect și cub perfect; **(3p)**

b) Comparați x^{11} cu 2^{51y+1}. **(4p)**

2. Determinați n astfel încât suma cifrelor numărului $A = \underbrace{555\ldots5}_{n\ cifre} \cdot 2020$ să fie 2024.

(G.M.) **(7p)**

3. Fie numerele $\overline{x_1x_2\ldots x_m} = 2^{1000} \cdot 5^{1023}$ și $\overline{y_1y_2\ldots y_n} = 2^{1023} \cdot 5^{1000}$. Calculați $m + n$.

(7p)

4. La un turneu de tenis participă n jucători.

a) Dacă turneul se organizează în sistem campionat, în care fiecare joacă un meci cu ceilalți $n - 1$ jucători, aflați câte meciuri se joacă în total, dacă $n = 16$; **(4p)**

b) Dacă turneul se organizează în sistem eliminatoriu (se trag la sorți meciurile înaintea fiecărui tur și se califică în următorul tur învingătorul din fiecare meci; în situația în care înaintea unui tur este un număr impar de jucători, unul dintre ei se califică fără să joace), aflați n știind că în total se joacă 23 de meciuri. **(3p)**

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

6

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VI – a

VI

SUBIECTE:

1. a) Știind că $\frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4}$, determinați $\frac{x}{y}$. **(3p)**

b) Determinați numerele naturale x, y, z, t, știind că sunt adevărate relațiile:
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3000$ și $\frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8}$. **(4p)**

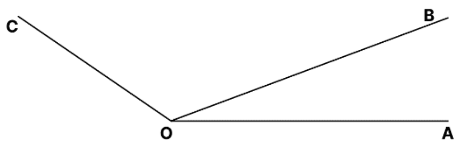
2. a) Fie a și b numere naturale nenule, astfel încât $a | a \cdot b + b$ și $b | a \cdot b + a$. Arătați că $a = b$. **(3p)**

b) Numerele naturale nenule x și y au proprietatea că numărul $x^{2023} + x + y^2$ este divizibil cu xy. Demonstrați că x este pătrat perfect. **(4p)**

3. În figura de mai jos, unghiurile AOB și AOC sunt neadiacente suplementare. Știind că suplementul unghiului AOC reprezintă jumătate din complementul unghiului AOB, calculați:

a) Măsura unghiului AOB **(4p)**

b) Dacă $[OD$ este bisectoarea unghiului AOB, iar semidreapta OR este semidreaptă opusă semidreptei OC, calculați măsura unghiului ROD. **(3p)**



4. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A, B, M, P, Q, S, astfel încât AB este diametru, M, P, Q situate pe aceeași parte a dreptei AB, P între M și Q, iar S de cealaltă parte a dreptei AB, astfel încât $\widehat{AM} \equiv \widehat{PQ} \equiv \widehat{BS} = 60^0$. Punctul N este situat pe arcul mic AS, astfel încât unghiurile AON și POQ sunt complementare.

a) Arătați că dreptele ON și MS sunt perpendiculare. **(3p)**

b) Dacă în plus, $\sphericalangle POM = 5 \cdot \sphericalangle BOQ$, iar T un punct situat pe arcul mic SN, astfel încât $\sphericalangle BOQ \equiv \sphericalangle SOT$, arătați că dreapta PO împarte arcul mic TN în două arce congruente. **(4p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

8

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VIII – a

V1

SUBIECTE:

1. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle BAC = 90^0$, $AC = 2\sqrt{6}\ cm$. Pe planul (ABC) se ridică de aceeași parte perpendicularele AD și CE, astfel încât $AD = 6\ cm$ și $CE = 4\ cm$. Arătați că dreapta CD este perpendiculară pe planul (BAE).

(7p)

2. a) Arătați că, pentru orice numere $x, y > 0$, are loc inegalitatea: $\dfrac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$.

(3p)

b) Arătați că, pentru orice numere $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea :

$$3 + 2\left(\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ca}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}\right) \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

(4p)

3. Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{(x, y) \in Z \times Z \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 20x - 22y\right\}$$

$$B = \left\{(x, y) \in Z \times Z \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 10y - 28x\right\}$$

Determinați mulțimea $A \cap B$. **(7p)**

4. Pe planul paralelogramului $ABCD$ se construiește perpendiculara VO, $\{O\} = AC \cap BD$. Pe segmentele AB, BC, respectiv, VO, există punctele M, N, respectiv, P astfel încât $MP \perp (VCD)$ și $NP \perp (VAD)$. Demonstrați că $ABCD$ este romb.

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.