9

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a IX – a

V1

SUBIECTE:

1. Fie D mijlocul laturii [BC] a $\Delta\boldsymbol{ABC}, \boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{AB}), \boldsymbol{N} \in (\boldsymbol{AC})$. Să se determine condiția de coliniaritate a vectorilor $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$ $și$ $(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND})$.

(7p)

2. Mulțimile finite A și B satisfac egalitatea:

$\frac{1}{card(A \cap B)} + \frac{1}{card(\,A \cup B)} + \frac{1}{card\,P(\,A \cup B)} = \frac{19}{24}$, unde $card\ M$ reprezinta numarul de elemente ale mulțimii M, iar $P(M)$ este mulțimea tuturor submulțimilor lui M. Să se justifice egalitatea $card(A) = card(B)$.

(7p)

3. Rezolvați in $\mathbb{R}$ ecuația $\left\{\frac{4x+3}{3x-2}\right\} = \frac{2x-2}{3x-2}$.

S.G.M 9/2023

(7p)

4. Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea ca $a + b + c = 1$. Să se arate ca $\frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} + \frac{ab}{a+b} \geq \frac{27abc}{2}$.

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

10

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a X – a

V1

SUBIECTE:

1. a) Arătaţi că: $\operatorname{Re} z = \frac{a}{4}\left(\left|z+\frac{1}{a}\right|^2 - \left|\bar{z}-\frac{1}{a}\right|^2\right), \forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall\, a \in \mathbb{R}^*$ **(3p)**

b) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi că:
$2(6+9\mathrm{i})^n - 3(1+8\mathrm{i})^n = 3(7+4\mathrm{i})^n \Leftrightarrow (2+\mathrm{i})^n + (2-\mathrm{i})^n = 2\cdot 3^{n-1}$ **(4p)**

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, o progresie aritmetică cu termeni pozitivi.

a) Demonstraţi că: $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **(2p)**

b) Fie $(b_n)_{n\geq 1}$, o progresie geometrică cu termeni mai mari decât 1. Demonstraţi că:
$\lg\frac{b_1+b_{2+\ldots}+b_n}{n} \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **(5p)**

3. Se consideră funcţia $f\colon(-\infty, 0] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

a) Arătaţi că funcţia f este strict monotonă. **(2p)**

b) Arătaţi că f este inversabilă şi determinaţi inversa ei. **(2p)**

c) Arătaţi că $f(x-1) + f\left(\frac{1}{x+1}\right) > f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in (-\infty, -1)$. **(3p)**

4. Dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe diferite două câte două, astfel încât $|z_1| = |z_2| =$ $= |z_3| = r$. Să se demonstreze că:
$\min_{a\in\mathbb{R}} |az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = \frac{1}{2r}|z_1 - z_2|\cdot|z_1 - z_3|$ **(7p)**

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

11

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XI – a

V1

SUBIECTE:

1. a) Se consideră matricea $X \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^{2023} = X^{2022}$. Demonstrați că $X^3 = X^2$.

(4p)

b)) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} cos^2\alpha & sin^2\alpha & 0 & 0 \\ sin^2\alpha & cos^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\beta & sin\beta \\ 0 & 0 & -sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}$, unde α și β sunt constante reale.

Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

(3p)

2. Se consideră $A, B \in M_2(\mathbb{C})$astfel încât $AB = BA \neq O_2$. Dacă $det\, A = det\, B = 0$, demonstrați că $det(aA + bB) = 0$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{C}$.

(7p)

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 0$ și $x_{n+1} = \sqrt{1 + nx_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right)^n$.

(7p)

4. a) Fie funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că $2^{f(x)} \leq x < 2^{f(x)+1}$, $\forall x > 1$. Determinați mulțimea punctelor în care f nu are limită.

(3p)

b) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale cu $x_2 > x_1 > 0$, care are proprietatea:

$$x_{n+1} \geq (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k \text{ , } \forall n \geq 2 \text{ .}$$

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(4p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

12

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XII – a

V1

SUBIECTE:

1. Pe R se definește legea de compoziție $x * y = axy - x - y + 6,\ \forall x, y \in R$, unde a este o constantă reală.

i) Să se arate că legea „*“ admite element neutru dacă și numai dacă $a = \frac{1}{3}$.

ii) Să se arate că dacă intervalul $[0, 6]$ este parte stabilă a lui R în raport cu legea „*“, atunci $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$.

2. Fie $a, b \in R$ și $F : R \to R$, $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

i) Să se determine numerele reale a și b astfel încât F să fie primitivă a unei funcții f.

ii) Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx$.

3. Fie $f : [0, 1] \to R$ o funcție continuă care admite o primitivă F, astfel încât $F(1) - F(0) = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $\frac{1}{\sqrt{2}} < f(c) < \frac{\sqrt{2}}{1+c}$.

4. Spunem că un grup finit cu cel puțin trei elemente este *prietenos* dacă pentru orice p prim, $p \mid \operatorname{ord} G$ și pentru orice automorfism al lui G, există $a \in G$, $\operatorname{ord} a = p$, astfel încât $f(a) = a$.

i) Să se determine grupurile *prietenoase* cu trei și patru elemente.

ii) Să se arate că ordinul unui grup *prietenos* nu e liber de pătrate.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.